RICARDO PASCALE *

Optimización de carteras de inversiones

* Profesor titular de finanzas de empresa, de la UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA, Montevideo.

I. INTRODUCCION

La teoría de la cartera se ocupa de la selección de combinaciones óptimas de inversiones por parte de personas aversas al riesgo. Los principales aportes a esta teoría fueron desarrollados por MARKOWITZ (1) en aplicaciones a los mercados de capitales, y por TOBIN (2) estudiando algunos aspectos de la demanda de dinero. Los trabajos de VON NEUMANN Y MORGENSTERN (3) al promediar este siglo, así como los del siglo XVIII de BERNOULLI (4) son sus antecedentes más importantes.

A partir de la formulación de la teoría, se han ido extendiendo sus aplicaciones, así como desarrollando nuevas teorías que explican otros fenómenos. Se la reconoce hoy día como el escalón fundamental a partir del cual comienza la moderna teoría de las finanzas.

Este trabajo persigue dos objetivos básicos. En primer lugar efectuar una exposición de la teoría a nivel de divulgación, repasando sus principales aspectos. En segundo lugar, desarrollar una aplicación práctica en la empresa.

II. CLASES DE CARTERAS DE INVERSIONES

Entendemos por cartera a una combinación de activos, o de negocios, cada uno de los cuales requiere una cierta inversión de capital, ofrece un cierto rendimiento, con una cierta incertidumbre (riesgo) durante un cierto tiempo. La teoría de la cartera trata de la óptima selección de esos activos, en forma tal que el inversor logre el máximo rendimiento posible dentro de un cierto nivel de riesgo; o el mínimo riesgo posible con un cierto nivel de rendimiento; o la combinación de riesgo y rendimiento que más lo satisfaga.

La teoría maneja la inversión, el rendimiento, y el riesgo de cada inversión; entendiendo por riesgo a la dispersión de los posibles rendimientos del negocio o activo alrededor de su probable promedio, la cual se mide por la probable varianza o desvío estándar de tales rendimientos. Y también utiliza la correlación entre los rendimientos de dos o más inversiones.

Si todos los negocios posibles, al alcance de un inversor, ofrecieran un rendimiento aleatorio cuyas posibles variaciones fueran paralelas (de igual intensidad e igual sentido) es evidente que el rendimiento del conjunto variaría también en igual forma. Ello ocurriría si el rendimiento de todos los activos, a través del tiempo, dependiera de idénticas variables. Por ejemplo, si un inversor tiene un negocio consistente en fabricar trajes de baño, puede suponerse que un negocio consistente en fabricar telas para trajes de baño debe depender de las mismas o muy similares variables de mercado que aquél: las variaciones de los resultados de ambos negocios deberían tender a estar muy correlacionadas. Un negocio consistente en producir anteojos para el sol tendrá también correlación con aquél, aunque algo menor, y un negocio consistente en fabricar alimentos, o tornos, tendría mucho menos paralelismo.

Desde luego, todas las actividades económicas guardan relación con la marcha general de la economía de un mercado o país, pero a su vez cada una depende de factores coyunturales propios, cuya importancia puede superar aquella influencia general. La teoría de la cartera hace uso de la diferente correlación entre los posibles resultados de distintos negocios, o activos, para minimizar la dispersión de los probables resultados del conjunto para cada nivel posible de rendimiento.

Para combinar inversiones es preciso distinguir entre dos casos posibles: el de inversiones de monto flexible e inversiones de monto rígido. Las primeras son aquellas en que el inversor puede decidir cuánto invertir, pudiendo variar el monto prácticamente en forma continua. El ejemplo típico de inversión flexible es la inversión bursátil: el inversor podría teóricamente invertir en cada tipo de título o acción la cantidad que quisiera.

Las inversiones rígidas son las que no permiten elegir el monto a invertir. Por ejemplo, el proyecto de instalar un supermercado en tal local, o en tal lugar: la alternativa es instalarlo o no instalarlo, pero no de instalar una fracción de supermercado. Pueden existir varias alternativas de lugar o volumen, pero cada una sólo admitirá que se la acepte o se la rechace íntegramente. En estos casos, cuando existe la posibilidad de emprender un negocio con diversos niveles de inversión, o con otras variantes, se trata a cada alternativa como un negocio o proyecto diferente, porque en general varían también sus perspectivas de rendimiento y aun sus riesgos.

III. CARTERAS DE INVERSIONES FLEXIBLES

3,1. COMBINACION DE DOS INVERSIONES

Comenzaremos por tratar de la combinación de inversiones flexibles, como pueden serlo las inversiones en papeles de renta. A los efectos de desarrollar los conceptos básicos trataremos primero una cartera compuesta por sólo dos activos, y luego pasaremos al caso general de n posibles activos. Para ese primer caso tenemos:

Activo	Monto de la inversión *(en tanto por uno sobre el total)*
A	x
B	$1-x$

Las probables tasas medias de rendimiento de ambos activos son variables aleatorias que designamos como k_A y k_B; la tasa media probable de rendimiento de la cartera, k_C, es también una variable aleatoria, combinación lineal de las anteriores, que resulta de la expresión siguiente:

$$k_C = x\ k_A + (1-x)\ k_B = k_B + x\ (k_A - k_B) \qquad [1]$$

Nótese que se supone que x (y por lo tanto también $1-x$) puede asumir cualquier valor entre cero y uno. De esta forma, si los rendimientos medios probables de las dos inversiones fueran:

$k_A = 0{,}11$

$k_B = 0{,}21$

el rendimiento medio probable de la cartera (k_C) sería:

$k_C = 0{,}21 - 0{,}10\ x$

Dado que x es la proporción de capital invertida en el activo A, el rendimiento esperado de la cartera se reducirá o aumentará en la medida que aumente o se reduzca la inversión en A. Cuando x es igual a cero, k_C es igual a k_A, o sea 0,21; y, en el otro extremo, cuando x es igual a uno, k_C es igual a k_B, o sea 0,11.

b) EL RIESGO, O PROBABLE VARIABILIDAD DE LOS RENDIMIENTOS

Para la teoría de la cartera el riesgo de un activo es igual a la probable variabilidad de los rendimientos en torno de su promedio. Y utiliza como subrogante del riesgo a una medida de esa variabilidad: la varianza.

Como es sabido, la varianza (σ^2) de los probables resultados de una variable aleatoria es la suma de los productos resultantes de multiplicar la probabilidad de ocurrencia de cada posible resultado de la variable, por el respectivo cuadrado de la diferencia entre ellos y la esperanza matemática (valor medio probable) de la distribución. El desvío estándar (σ) es la raíz cuadrada *positiva* de la varianza, y a veces es más cómodo trabajar con él.

La varianza de una combinación de dos variables aleatorias es función de sus respectivas varianzas, de la covarianza o *correlación* entre ellas, y del peso de cada variable en la combinación; en el caso de una combinación de dos inversiones, la probable varianza de los rendimientos de esa cartera es:

$$\sigma_C^2 = x^2\ \sigma_A^2 + (1-x)^2\ \sigma_B^2 + 2\ x\ (1-x)[cov\ (k_A\ k_B)] \qquad [2]$$

La covarianza (*cov*) usada en esta ecuación es igual al coeficiente de correlación (r) multiplicado por los desvíos estándar de ambas variables, de modo que puede también escribirse así:

$$\begin{aligned}\sigma_C^2 &= x^2\ \sigma_A^2 + (1-x)^2\ \sigma_B^2 + 2\ x\ (1-x)\ r_{AB}\ \sigma_A\ \sigma_B = \\ &= (x\ \sigma_A^2) + [(1-x)\sigma_B]^2 + 2\ x\ (1-x)\ r_{AB}\ \sigma_A\ \sigma_B\end{aligned} \qquad [3]$$

c) VARIANZA DE LA CARTERA, EN CASO DE CORRELACION POSITIVA PERFECTA

Como es sabido, el coeficiente de correlación varía entre menos uno (perfecta correlación inversa, o negativa) y más uno (perfecta correlación positiva). Veremos los efectos de distintas intensidades de correlación entre las tasas de rendimiento de *A* y *B*, sobre la varianza de la cartera formada por ambos activos. Cuando la correlación es perfecta y positiva ($r = 1$) la [3], queda así:

$$\sigma_C^2 = (x\ \sigma_A)^2 + 2\ x[(1-x)\ \sigma_B]^2 + 2\ x\ (1-x)\ \sigma_A\ \sigma_B =$$

$$= [(x\ \sigma_A) + (1-x)\ \sigma_B\ ]^2 = [\sigma_B + x\ (\sigma_A - \sigma_B)]^2 \qquad [4]$$

de donde el desvío estándar de esta cartera de dos inversiones es:

$$\sigma_C = x\ \sigma_A + (1-x)\ \sigma_B = \sigma_B + x\ (\sigma_A - \sigma_B) \qquad [5]$$

Analizando la [5] es fácil comprobar que la varianza de la cartera sería nula cuando σ_A y σ_B fueran iguales a cero, hipótesis que descartamos porque las inversiones sin riesgo no ofrecen otro problema que el de elegir las de mayor rendimiento. Suponiendo que σ_A y σ_B no sean nulas, σ_C sólo podría ser nula cuando x asuma un cierto valor x_0 tal que:

$$\sigma_B = -x_O(\sigma_A - \sigma_B) = (\sigma_B - \sigma_A)$$

de donde:

$$x_O = \frac{\sigma_B}{\sigma_B - \sigma_A}$$

Ahora bien, siendo σ_A y σ_B distintas y mayores de cero puede ocurrir que:

a) σ_B sea mayor o igual que σ_A: en tal caso el denominador es positivo y menor que el numerador; y el valor de x_o debería ser mayor que uno; como ello implica una inversión superior al 100 % en el activo *A* (lo que no es posible) la varianza de la cartera no podría ser nunca nula en este caso;

b) σ_B sea menor que σ_A: en tal caso x_O sería negativo, lo que significa inversión menor que cero; como ello tampoco es posible, la varianza no puede ser nunca nula.

En otras palabras: en caso de correlación positiva perfecta, si el rendimiento de las inversiones individuales tiene varianza no nula, la varianza de la cartera es no nula ([5]).

En el mismo supuesto de varianzas no nulas, la varianza de la cartera será máxima:

a) si σ_B es mayor σ_A: cuando x (proporción invertida en *A*) sea nula; y entonces:

$$\sigma_C = \sigma_B$$

b) si σ_B es menor que σ_A: cuando x es uno, y entonces:

$$\sigma_C = \sigma_A$$

O sea que la máxima varianza posible está dada por la máxima varianza de los rendimientos de cada inversión individual. Del mismo modo, la varianza mínima posible está dada por la menor de las varianzas individuales. En síntesis: la varianza de la cartera se hallará siempre en algún punto entre ambas varianzas individuales, o coincidirá con una de ellas (en caso de no invertir nada en el otro negocio). Pongamos que tenemos los siguientes datos:

Detalle	Inversiones A	Inversiones B
	(Valores posibles, en tanto por uno)	
k	0,11	0,21
σ	0,07	0,19

El desvío estándar de la cartera es, según la [5]:

$\sigma_c = 0,19 + x\ (0,07 - 0,19)$

El valor máximo de σ_C se produce cuando x es igual a cero, y coincide con $\sigma_B = 0,19$; el valor mínimo se produce cuando x es igual a uno, y coincide con $\sigma_A = 0.07$; no puede ser nunca nulo.

Es de señalar que, habiendo correlación positiva perfecta entre los rendimientos de dos inversiones, sólo puede ser menor la varianza (y el desvío estándar) de una que de la otra, si también es menor su rendimiento medio. De modo que sólo podrá disminuirse la varianza de una cartera, mediante el agregado de nuevos negocios cuyos rendimientos tengan correlación perfecta con ella, a costa de reducir el rendimiento.

d) VARIANZA DE LA CARTERA EN CASO DE CORRELACION PERFECTA

En caso de correlación negativa ($r = -1$) la [3] toma esta forma:

$$\sigma_C^2 = (x\ \sigma_A)^2 + [(1-x)\ \sigma_B]^2 - 2\ x\ (1-x)\ \sigma_A\ \sigma_B =$$

$$= [(x\ \sigma_A) - (1-x)\ \sigma_B]^2 = [x\ (\sigma_B + \sigma_A) - \sigma_B]^2 \qquad [6]$$

Por lo tanto:

$$\sigma_C = x\ (\sigma_B + \sigma_A) - \sigma_B \qquad [7]$$

En este caso, y suponiendo que las varianzas individuales no son nulas, la varianza de la cartera sería nula para un valor x_0 tal que:

$$x_0\ (\sigma_B + \sigma_A) = \sigma_B \qquad [8]$$

de donde:

$$x_0 = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} \qquad [9]$$

Este valor de x_0 es inferior a uno y mayor a cero para todo valor de los desvíos estándar de A y B. Por lo tanto, aun cuando ninguna de las varianzas individuales sea nual, sería siempre posible obtener una cartera de varianza probable nula.

Tomando las mismas cifras del ejemplo utilizado anteriormente:

$\sigma_C = 0{,}26\ x - 0{,}19$

En este caso el desvío estándar será nulo cuando:

$$x_O = \frac{0{,}19}{0{,}26} = 0{,}7308$$

La máxima varianza está dada por la mayor de las varianzas individuales (con 100 % de colocación en el negocio respectivo). Hagamos notar que, cuando la varianza de la cartera se hace nula, se ha obtenido la eliminación del riesgo; que es uno de los objetivos de la diversificación de inversiones.

Volviendo a la [8] y recordando que el desvío estándar no puede ser negativo, resulta que:

$$x\ (\sigma_B + \sigma_A)$$

deberá ser forzosamente mayor que σ_B; pero esto sólo puede ocurrir mientras x sea igual o mayor que el valor x_o indicado por la [9]. Cuando es igual o menor, la [7] debe escribirse así:

$$\sigma_C = (1-x)(\sigma_B + \sigma_A) - \sigma_A = (1-x)\ \sigma_B - (x\ \sigma_A) \qquad [10]$$

y por lo tanto:

$$(\sigma_C)^2 = [(1-x)(\sigma_B + \sigma_A) - \sigma_A]^2 = [(1-x)\ \sigma_B - (x\ \sigma_A)]^2 \qquad [11]$$

Esta expresión es idéntica a la [6], pero de signo contrario. Supongamos ahora que se trata de agregar a una inversión ya existente, de desvío estándar igual a σ_A, una nueva inversión cuyos rendimientos están perfecta y negativamente correlacionados con los de aquélla, y con rendimientos cuyo desvío estándar es σ_B. El nuevo desvío estándar será el que indican las ecuaciones [7], o [10], según que x sea mayor o menor que x_O. La diferencia (δ) entre este desvío estándar y el de la inversión anterior será:

a) disminución (δ) en el desvío estándar, para todo x mayor o igual que x_O:

$$\delta\ (x \geqslant x_o) = \sigma_A - [x\ (\sigma_B + \sigma_A) - \sigma_B] = (1-x)(\sigma_A + \sigma_B) \qquad [12]$$

b) disminución en el desvío estándar, para todo x menor o igual que x_o, pero mayor que x_L:

$$\delta(x_L \leqslant x \leqslant x_O) = \sigma_A - [(1-x)\ \sigma_B - x\ \sigma_A] = \sigma_A - \sigma_B + x\ (\sigma_A + \sigma_B) \qquad [13]$$

La [13] se hace negativa, lo que denota aumento en el desvío estándar, a partir de un valor límite (x_L) cuando:

$$\sigma_A + x_L\ (\sigma_A + \sigma_B) \leqslant \sigma_B$$

de donde:

$$x_L \leqslant \frac{\sigma_B - \sigma_A}{\sigma_A + \sigma_B}$$

c) aumento en el desvío estándar, para todo x menor o igual a x_L:

$$\delta\ (x \leqslant x_L) = \sigma_B - \sigma_A - x\ (\sigma_A + \sigma_B) \qquad [15]$$

Cuando σ_B es mayor que σ_A, el valor límite x_L es real, o sea superior a cero; cuando es menor, no existe límite, o sea que el desvío estándar sigue bajando a medida que aumenta la proporción invertida en B, hasta llegar al 100 %. Con las mismas cifras del ejemplo anterior tenemos que, mientras x sea mayor o igual que 0,7308 el desvío estándar en los rendimientos de A y B se reducirá así:

$$\delta\ (x \leqslant x_o) = 0{,}26\ (1 - x)$$

A partir de x_o y hasta x_L, se reduce así:

$$\delta\ (x_L \leqslant x \leqslant x_O) = 0{,}07 - 0{,}19 + 0{,}26\ x = 0{,}26\ x - 0{,}12$$

En este caso:

$$x_L = \frac{0{,}19 - 0{,}07}{0{,}19 + 0{,}07} = \frac{0{,}12}{0{,}26} = 0{,}4615$$

y entonces para todo x igual o menor que 0,4615 el desvío estándar aumenta así:

$$\delta\ (x \leqslant x_L) = 0{,}19 - 0{,}07 - 0{,}26\ x = 0{,}12 - 0{,}26\ x$$

4) VARIANZA DE LA CARTERA EN CASO DE CORRELACION NULA

Entendemos por correlación nula el caso en que $r_{AB} = 0$; en este supuesto, la [4] queda reducida a la siguiente forma:

$$\sigma_c^2 = (x\ \sigma_A)^2 + (1 - x)^2\ \sigma_B^2 \qquad [16]$$

El valor máximo posible de la varianza es igual a la mayor de las varianzas individuales (implicando colocación total en la respectiva inversión). El valor mínimo posible es siempre mayor que cero (salvo que σ_A y σ_B sean iguales a cero) y corresponde a x_O que se obtiene haciendo igual a cero la derivada de la [16] y depejando x; hecho esto se obtiene:

$$x_O = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} \qquad [17]$$

y, por lo tanto:

$$1 - x_o = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} \qquad [18]$$

Retomando el mismo ejemplo, el valor mínimo de la varianza de los rendimientos de la cartera corresponde a:

$$x_o = \frac{0,19^2}{0,07^2+0,19^2} = \frac{0,0361}{0,0049+0,0361} = 0,8805$$

Aplicando este valor de x a la [16] obtenemos:

$$\sigma^2 = (0,8805 \times 0,07)^2 + (0,1195 \times 0,19)^2 = 0,0043144$$

$$\sigma = 0,0657$$

Como puede verse, mediante una pequeña inversión en el negocio B, puede lograrse una reducción (también pequeña) en la varianza de la cartera respecto de la varianza de A (que era 0,07); y ello a pesar de que la varianza de B es mayor que la de A.

La diferencia (δ) entre la varianza (σ_A^2) de los rendimientos de una inversión preexistente, y la varianza (σ_c^2) de los rendimientos de una cartera en que se haya incorporado otra inversión de varianza (σ_B^2), es:

$$\delta = \sigma_A^2 - (x\ \sigma_A)^2 - (1-x)^2\ \sigma_B^2 =$$

$$= (1-x)^2\ \sigma_A^2 - (1-x)^2\ \sigma_B^2 \qquad [19]$$

Cuando δ toma valores negativos la varianza comienza a aumentar, y ello debe ocurrir a partir de $x \leqslant x_o$.

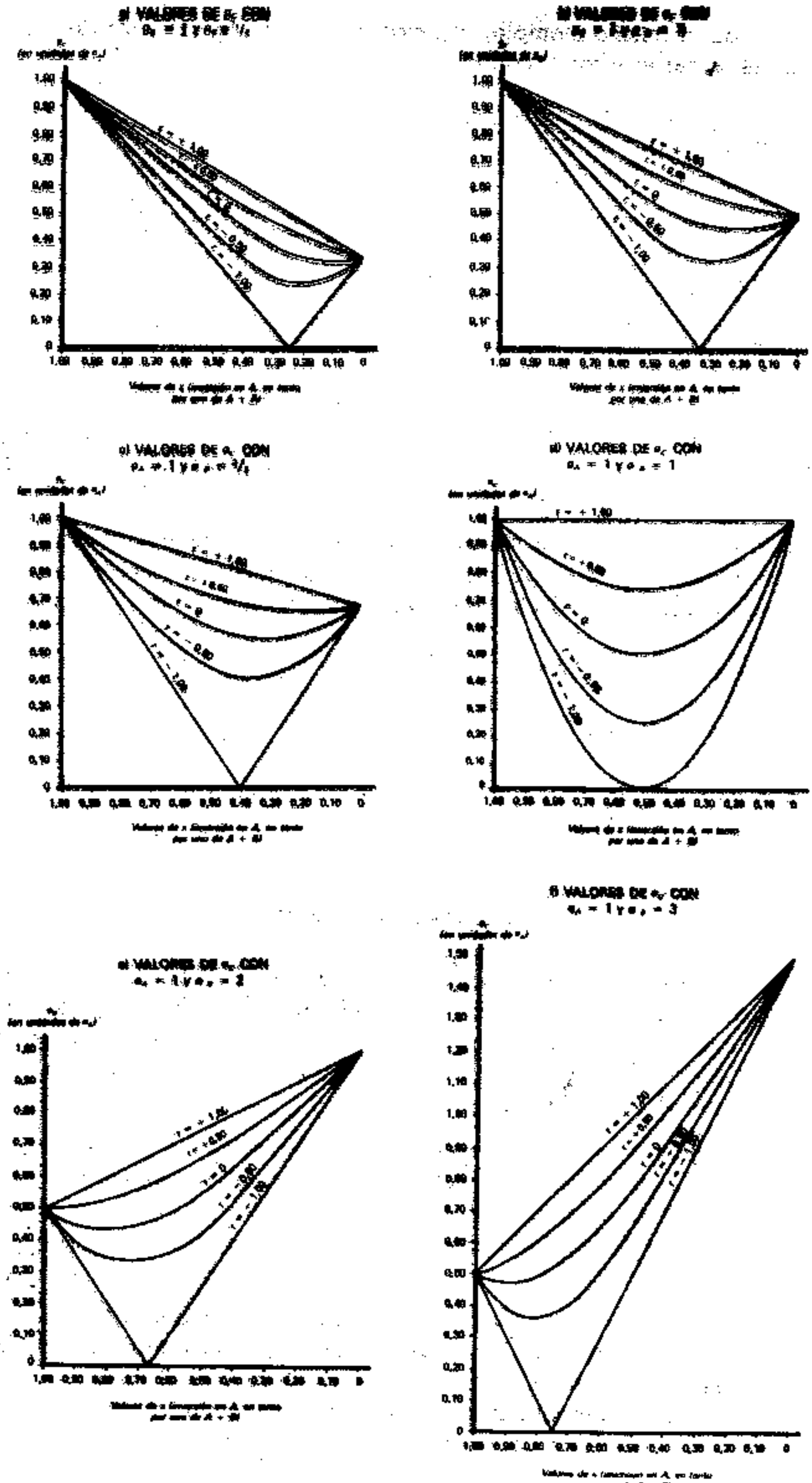
f) CONSIDERACIONES FINALES

Por lo expuesto, cuando se procura agregar a un negocio o conjunto de negocios, A, con una cierta rentabilidad media probable, k_A, y cierta varianza σ_A de ésta, una nueva inversión B, con rendimiento probable k_B y varianza σ_B de ésta, los efectos de esta combinación dependen de la correlación entre los rendimientos de A y B.

Si la correlación es positiva y perfecta la varianza total disminuirá, quedará igual o aumentará según que σ_B^2 sea menor, igual o mayor que σ_A^2; y se hallará entre σ_A^2 y σ_B^2. A su vez, los rendimientos medios probables tendrán una variación opuesta a la de las varianzas: si éstas suben aquéllas bajan, y a la inversa.

Si la correlación es negativa y perfecta, existe una proporción x_o de la vieja inversión y, por consiguiente $(1-x_o)$ de la nueva, que hace nula la varianza. O sea que en este caso puede obtenerse una varianza global menor que la de cualquiera de los componentes, y no necesariamente, aunque sí probablemente, esta reducción de riesgo implique la reducción de los rendimientos probables.

Si la correlación es nula, la varianza de la cartera no puede llegar a ser nula (a menos que σ_A y σ_B lo sean) pero tiene un mínimo, inferior a cualquiera



1. Desvíos estándar de diversas combinaciones de dos inversiones, en distintos supuestos de las varianzas individuales. Y no necesariamente la reducción de riesgo implica reducir el rendimiento.

En la práctica, la mayoría de los negocios asequibles guarda correlación positiva menos que perfecta; o, a veces, leve correlación negativa. En estos casos la diversificación puede favorecer la reducción de riesgos sin gran sacrificio de rentabilidad.

En la ilustración n° 1 hemos representado los desvíos estándar de una serie de combinaciones de dos inversiones, cuyos respectivos desvíos estándar están en relación de 3 a 1, 2 a 1, 1 a 1, 1 a 2 y 1 a 3, suponiendo que los coeficientes de correlación sean iguales a uno, a un medio, a cero, a menos un medio, y a menos uno. Es fácil ver que en el único supuesto que σ_c puede anularse es cuando el índice de correlación es igual a menos uno.

Cuando el índice de correlación es igual a más uno, el desvío estándar varía linealmente en relación a x. En los demás casos hay una combinación óptima que, cuando la correlación es nula, o negativa, puede tener un desvío estándar menor que el más bajo de σ_A o σ_B. Cuando la correlación es positiva, σ_c se halla entre σ_A y σ_B.

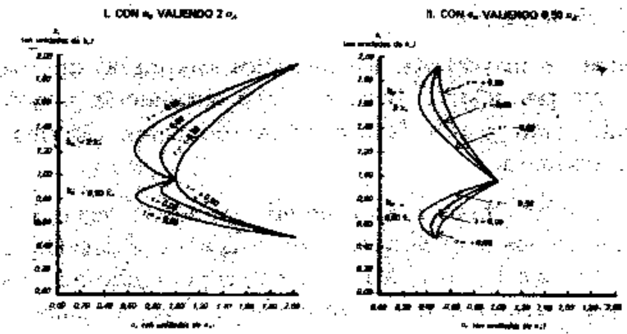
En la ilustración n° 2 hemos representado la tasa de rendimiento (sobre el eje de las ordenadas) y el desvío estándar (sobre el eje de las abscisas) de la cartera formada por A y B, para distintos supuestos: con σ_B igual a la mitad, o al doble de σ_A; con un índice de correlación igual a 0,50, a cero, y a menos 0,50, y con k_B igual a la mitad, o al doble de k_A. Este gráfico permite observar (parte I del gráfico) que, siendo σ_B mayor que σ_A, si no existe correlación perfecta entre los rendimientos de ambas inversiones, cuando k_B es mayor que k_A puede obtenerse a la vez reducción del riesgo y aumento de rentabilidad, combinando hasta cierto punto ambos activos, y, siendo k_B menor que k_A, puede obtenerse mayor reducción de riesgo que de rendimiento. En la segunda parte de la ilustración puede verse que cuando σ_B es menor que σ_A, toda combinación de A y B reducirá el riesgo, cualquiera sea el índice de correlación (pero lo reducirá más, cuanto menos positivo o más negativo sea éste), y la tasa de rendimiento subirá o bajará según que k_B sea mayor o menor que k_A.

En general puede decirse que, a rendimientos probables satisfactorios, cuanto menos correlacionados positivamente, o más correlacionados negativamente los resultados de distintos negocios, su combinación (diversificación) traerá reducción de riesgo (menor dispersión de los resultados alrededor de su promedio).

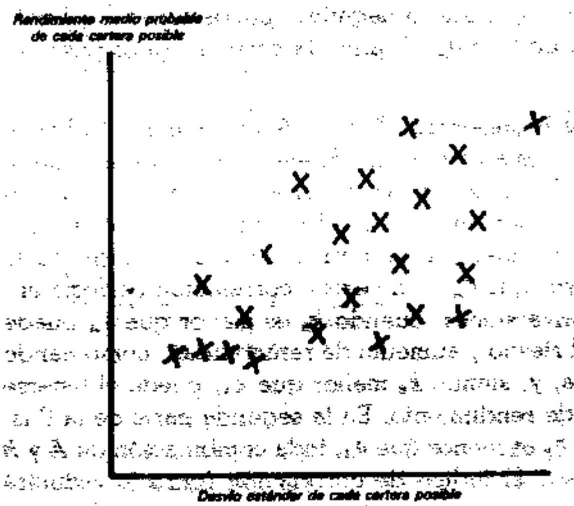
3,2. COMBINACION DE N INVERSIONES

El análisis efectuado para dos activos puede ser expandido para abarcar n activos, aplicando relaciones conocidas. Si k_i es la tasa media probable de rendimiento del activo i y x_i es la proporción invertida en este activo, en tanto por uno de la inversión total, entonces el rendimiento medio probable de la cartera responde a la fórmula siguiente:

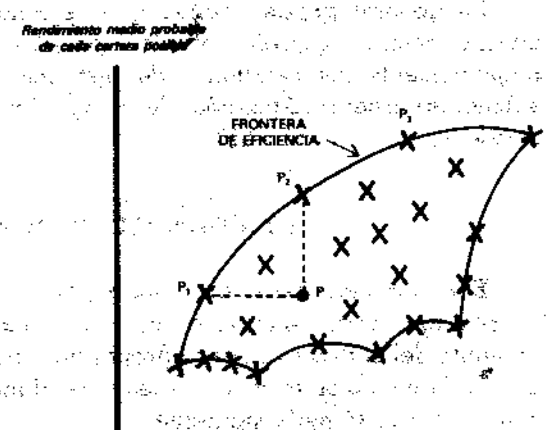
$$k_c = \sum_{i=1}^{n} x_i\, k_i \qquad [20]$$



2. Relación entre la tasa de rendimiento y el desvío estándar, de una combinación de dos inversiones, bajo diversos supuestos



3. Representación de los probables resultados (rendimiento y desvío estándar) de las distintas combinaciones posibles de inversiones



4. Frontera de eficiencia del elenco de posibilidades percibidas

A su vez si σ_i es el desvío estándar de los rendimientos del activo i, y r_{ij} es el coeficiente de correlación entre los activos i y j, entonces la varianza de los rendimientos de la cartera total es:

$$\sigma_c^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i\, x_j\, r_{ij}\, \sigma_i\, \sigma_j \qquad [21]$$

3,3. LA FRONTERA DE EFICIENCIA

Hemos repasado los dos atributos fundamentales en los que se basa la teoría, esto es, riesgo y rendimiento. Supongamos ahora que contamos con n posibles inversiones, que podríamos combinar en una cantidad considerablemente alta de maneras diferentes en cuanto a los activos incluidos en cada combinación y la proporción invertida en cada uno. O sea que podríamos formar muchas carteras diferentes, cada una de las cuales tendrá un rendimiento medio probable, y un desvío estándar (riesgo, o variabilidad) determinado.

El conjunto de todas las combinaciones que sería posible formar es nuestro elenco de posibilidades o elenco de oportunidades percibidas. En la ilustración n° 3 hemos representado cada cartera posible mediante un punto, ubicado tomando el desvío estándar sobre las abscisas y el rendimiento medio probable sobre las ordenadas.

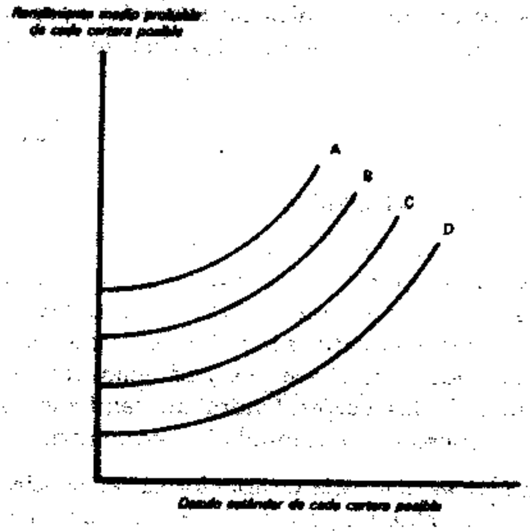
Supóngase que el número de posibilidades fuera muy grande, y que uniéramos con una línea a todos los puntos que, para cada valor de σ_c, acusen el más alto valor de k_c. Y, a la inversa, que uniéramos también los puntos que a igual σ_c, muestre el más bajo valor de k_c. Obtendríamos una figura parecida a la que se ve en la ilustración n° 4. La *línea gruesa*, en el lomo de la figura, representa *la serie de mejores combinaciones* posibles: se la denomina frontera de eficiencia.

Todo punto (toda cartera) a la derecha o abajo de esa frontera será menos interesante, por ofrecer menor rendimiento medio probable a igualdad de riesgo, o mayor riesgo a igualdad de rendimiento medio probable. Por supuesto, todo punto a la izquierda o arriba de la frontera de eficiencia sería aún más interesante, pero se supone que no existen, o no se ha sabido hallarlos o incluirlos: es decir, no figuran en el elenco de posibilidades entre las cuales podemos optar.

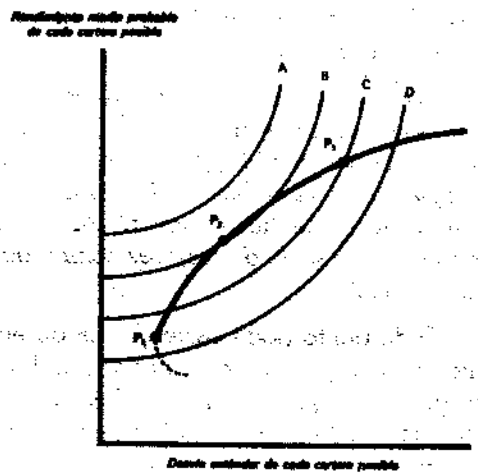
Tomemos por ejemplo la cartera representada por el punto P, en la ilustración n° 4, que tiene un nivel dado de rendimiento y de riesgo. Para igual rendimiento, el punto P_1 ofrece menor riesgo; y para igual riesgo, el punto P_2 promete mayor rendimiento. Según pudimos observar en la ilustración n° 2, las curvas de riesgos y rendimientos son convexas respecto a las ordenadas (rendimientos); ello se debe a que los índices de correlación varían entre menos uno y más uno.

IV. ELECCION DEL PORTAFOLIOS OPTIMO

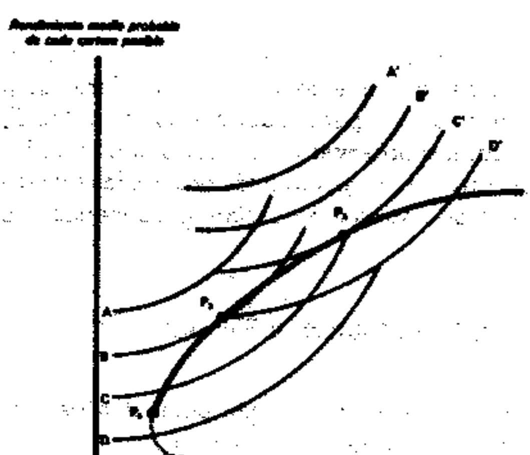
La frontera de eficiencia indica las posibilidades más eficientes de que dispone, o que ha percibido, un inversor. Pero decidir cuál de todas éstas es la preferible, para ese inversor, depende de su actitud hacia el riesgo. Se supone que todo inversor racional preferirá menor riesgo a igualdad de rendimiento, o



5. Distintas curvas de indiferencia



6. Curvas de indiferencia y frontera de eficiencia



7. Elección de la cartera óptima, por dos personas con diferente actitud ante el riesgo mayor rendimiento a igualdad de riesgo; pero también se supone que, a cierto aumento de posibilidades de ganar, habrá una disposición a aceptar cierto aumento de riesgo. En otras palabras, cada inversor será indiferente a una cierta serie de combinaciones de riesgo y ganancia. Por ejemplo, en la ilustración nº 5, supondremos que un inversor es indiferente a cualquier oportunidad cuyos rendimientos medios probables y desvíos estándar la ubiquen sobre la curva *A*; o, a falta de ellos, sería indiferente a cualquier oportunidad ubicada sobre la curva *B* (aunque toda ella menos preferible que la curva *A*); y así sucesivamente. Es decir que, sobre una curva dada, todas las combinaciones de k_c y σ_c son igualmente atrayentes para el inversor.

La aversión al riesgo que se ha tomado como hipótesis, implica que las distintas curvas de indiferencia deben tener tangente positiva. El inversor estará interesado en aumentar su satisfacción, y ello se cumple en la medida en que pueda conseguir una inversión ubicada sobre una curva que se halle más arriba y a la izquierda. De esta forma, la ilustración nº 6 representa las oportunidades más eficientes que el mercado posibilita, junto con las curvas de indiferencia de un inversor, que representan sus preferencias ante el riesgo y el rendimiento. El portafolios óptimo es *B*, que perteneciendo a la frontera de eficiencia coloca al inversor en su curva de indiferencia más alta posible.

Cada inversor tiene sus propias curvas de indiferencia, para cada valor dado de insumo. Ello implica la elección de carteras diferentes por personas diferentes. La ilustración nº 7 nos da un ejemplo de lo dicho. En ella se aprecia una frontera de eficiencia representada por la curva *A, B, C, D.* Junto a ella aparecen dos juegos de curvas de indiferencia que pertenecen a dos inversores diferentes.

Para el primero de ellos, que es más averso al riesgo que el segundo, la cartera óptima está representada por *B* (con menor riesgo y menor rendimiento) en tanto para el segundo sería *C* (con mayor riesgo y mayor rendimiento).

V. CARTERA DE INVERSIONES NO DIVISIBLES

En el ámbito de la actividad empresaria, los proyectos de inversión no suelen ser divisibles; sólo admiten dos decisiones: emprenderlos, o no emprenderlos.

Ello los diferencia del caso que vimos en el capítulo anterior, en que suponemos que el total de las inversiones igualaba siempre el total disponible para invertir. En este caso, la suma de cantidades finitas, inamovibles, difícilmente iguale la suma disponible: deberá ser siempre menor. Normalmente se supone que el remanente no utilizado se coloca en una inversión flexible, bursátil o financiera.

En estos supuestos el problema de la obtención de una cartera óptima puede formularse así:

MINIMIZAR:

$$r_C = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \, x_i \, a_j \, x_j \, r_{ij} \, \delta_i \, \delta_j \qquad [22a]$$

SUJETO A:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, x_i \, k_i \geqslant k' \qquad [22b]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, x_i = 1 \qquad [22c]$$

donde:

N = número de proyectos de inversión asequibles para el inversor;

$x_i; x_j$ = inversión en el activo o negocio i, o j, en tanto por uno del total disponible para invertir; siendo todas las x inamovibles, salvo x_n que es:

$$x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \, x_i$$

$\delta_i; \delta_j$ = coeficientes iguales a uno o a cero, indicativos de que la inversión i o j se realiza, o no se realiza;

r_{ij} = coeficiente de correlación entre los rendimientos de i y j;

$\sigma_i; \sigma_j$ = desvío estándar de los rendimientos probables de los activos i o j;

k' = rendimiento medio probable de la inversión i;

k' = nivel mínimo deseado de rendimiento.

La solución a este problema suele entrañar una tarea bastante pesada, porque aparte del cálculo de las n tasas de rendimiento de los n proyectos entre los que se puede elegir, del de sus respectivos desvíos estándar y del de la inversión requerida (que es la base de ponderación para establecer los promedios), requiere también calcular los coeficientes de correlación entre cada par de proyectos. Esto da un número igual a:

$$\frac{n\,(n-1)}{2}$$

índices de correlación. Si tuviéramos 5 proyectos, se necesitan 10 índices; con 10 proyectos, necesitaríamos 45 índices; para 50 proyectos, se necesitan 1.225. Por otro lado, la correlación no es fácil de calcular; en general debe estimarse subjetivamente. Como una manera de facilitar estos análisis, MARKOWITZ (6) sugiere correlacionar los rendimientos de cada inversión con un modelo de mercado. Siguiendo estas orientaciones, SHARPE (7) se apoya en que los rendimientos de toda inversión están relacionados con un cierto índice que mide la actividad económica general, o el mercado, y sostiene que pueden expresarse como una regresión de la forma:

$$k_{it} = a_i + b_i \, k_{mt} + e_{it} \qquad [23]$$

donde:

k_{it} = el rendimiento t del activo i;

$a_i; b_i$ = parámetros de la regresión;

k_{mt} = rendimiento t de un determinado índice del mercado;

e_{it} = es el término de error t para el activo i.

Teniendo en cuenta los supuestos en que se basa el modelo de regresión expuesto, y siguiendo relaciones conocidas, se llega a que:

$$k_i = a_i + b_i\, k_m \qquad [24]$$

$$\sigma_i^2 = b_i^2\, \sigma_m^2 + \sigma_{e\,(i)} \qquad [25]$$

$$\mathrm{cov}\,(k_i;\ k_j) = b_i\, b_j\, \sigma_m^2 \qquad [26]$$

Para una cartera de 50 posibles inversiones las covarianzas a estimar siguiendo el modelo original de MARKOWITZ 1.225, mientras que con el modelo simplificado de SHARPE deberán calcularse 50 coeficientes de regresión ([8]). El modelo de SHARPE, sin embargo, al no considerar las relaciones entre las distintas inversiones, pierde una buena parte de información.

Nosotros creemos que puede ser mejor estimar la correlación entre los distintos pares de proyectos, por dos motivos: el primero, que generalmente no se tienen tantos proyectos para elegir; el segundo, que uno de esos proyectos, en el modelo, es la cartera existente, y muchos de los proyectos son adiciones a algún negocio existente, cuya correlación con el conjunto puede casi siempre deducirse de la experiencia pasada; y, cuando algún proyecto implica verdadera diversificación, su correlación debe por lo común estimarse subjetivamente.

Otro problema que hace a la exactitud de los cálculos es la determinación del capital invertido en cada negocio. Suponemos que se trata de inversión total, en capital propio y prestado; pero los proyectos tienen diferentes duraciones, con diferente evolución de la inversión de cada uno a través del tiempo. Supóngase que tenemos dos proyectos con duración de 3 y 5 años, respectivamente, y los siguientes flujos netos marginales de fondos:

Período	Proyecto A	Proyecto B
	(Flujos netos, en miles de $)	
0	− 1.000	− 1.000
1	400	600
2	500	500
3	600	400
4		300
5		200

Las tasas de rendimiento de estos proyectos son de 21,66 % y 36,09 %, respectivamente, y la inversión inicial es la misma en ambos casos. Pero el proyecto *A* durante su vida, rinde el 21,66 % sobre una inversión total (por un período) de $ 2.310,44, mientras que el proyecto *B* rinde el 36,09 % de una colocación de $ 2.773,32, como se comprueba por el siguiente cuadro amortizante.

Período	Proyecto A			Proyecto B		
	Inversión inicial	Rendimiento del período	Ingreso	Inversión inicial	Rendimiento del período	Ingreso
	(miles de $)					
0	1.000,00	216,60	400	1.000,00	360,90	600
1	816,60	176,88	500	760,90	274,61	500
2	493,48	106,88	600	535,51	193,27	400
3	0,36	-	-	328,78	118,65	300
4	-	-	-	147,43	53,21	200
5	-	-	-	0,70	-	-
Totales	2.310,44	-	-	2.773,32	-	-

Estos importes son los que señalan el monto real de la inversión que se tendrá en el futuro en cada proyecto. Pero, a los efectos de presupuestar el uso de fondos disponibles en el momento de la decisión, no tienen mayor significado. De allí que, para utilizar integramente los fondos disponibles, la inversión flexible debería ser igual a la diferencia entre aquéllas y las inversiones iniciales requeridas por cada combinación de proyectos; en cambio, los valores de x_i deben ser los capitales totales a utilizar, según surge de la suma de las inversiones en cada período, dividida por la sumatoria de dichos capitales.

VI. EJEMPLO PRÁCTICO

Supongamos que una empresa se encuentra abocada al estudio de cuatro proyectos de inversión, que se agregarían a la actividad actual. Los datos financieros respectivos figuran en la ilustración Nº 8. El índice de correlación entre cada par de proyectos se expone en la ilustración Nº 9.

Supondremos que algún proyecto es incompatible con otros; digamos que los proyectos *B* y *C* son mutuamente excluyentes. Es decir que en ninguna combinación pueden figurar ambos. Todos los proyectos tienen un rendimiento satisfactorio.

Supondremos también que no existe limitación en cuanto a la posibilidad de contar con los fondos necesarios. En la ilustración Nº 10 exponemos todas las carteras posibles, con su rendimiento medio y su desvío estándar, calculados mediante la [20] y [21]. Existen dos combinaciones claramente superiores: la formada por *A* más los proyectos *B* y *D*, la formada por *A* más *B*, *D* y *E*.

La primera tiene un mayor rendimiento probable que la segunda: 20,37 % contra 19,96 %; pero la segunda tiene un desvío estándar bastante inferior: 5,70 % contra 6,79 %. Además la inversión total es mayor en la combinación *ABDE*. Según la inclinación al riesgo de cada persona, se preferirá uno u otro; pero es posible que la mayoría resolvería incorporar también el proyecto *E*, pues a pesar de su rendimiento algo inferior está negativamente correlacionado con los demás, y reduce mucho la variabilidad de los rendimientos.

Proyecto	Inversión total	Rendimiento de la inversión	Desvío estándar
	($)	*(tanto por uno)*	
A	15.000	0,20	0,08
B	3.000	0,22	0,06
C	1.500	0,19	0,10
D	1.000	0,21	0,09
E	4.000	0,18	0,05

8. Datos financieros de una serie de proyectos factibles

Proyectos	Proyectos				
	A	B	C	D	E
	(Indices de correlación)				
A	1,00	0,50	0,70	−0,10	0,10
B	0,50	1,00	0,20	−0,40	−0,30
C	0,70	0,20	1,00	−0,75	−0,50
D	−0,10	−0,40	−0,75	1,00	−0,20
E	0,10	−0,30	0,50	−0,20	1,00

9. Indices de correlación entre los proyectos

Carteras posibles	Inversión total	Rendimiento	Desvío estándar
	($)	*(%)*	*(%)*
A	15.000	20,00	8,00
AB	18.000	20,33	7,22
AC	16.500	19,91	7,94
AD	16.000	20,06	7,58
AE	19.000	19,58	6,51
ABD	19.000	20,37	6,79
ABE	22.000	19,91	6,02
ACD	17.500	19,97	7,41
ACE	20.500	19,54	6,61
ADE	20.000	19,65	6,14
ABDE	23.000	19,96	5,70
ACDE	21.500	19,60	6,24

10. Rendimientos y desvíos estándar de todas las carteras posibles

VII. CONSIDERACIONES FINALES

Hemos repasado sintéticamente la teoría de la cartera, y nos hemos referido también al modelo de dos parámetros de MARKOWITZ y al modelo simplificado de SHARPE.

Sus aplicaciones son múltiples. Expusimos solamente una, orientada hacia la empresa, y dentro de la misma a inversiones en activos fijos. Pero es aplicable a otros temas, como el capital de trabajo y decisiones de financiamiento. La moderna teoría de los mercados de capitales encuentra también, en las aportaciones vistas, sus bases fundamentales.

A LINTNER ([10]) y FAMA ([11]), entre otros, se los reconoce como los seguidores más recientes de la teoría y a ellos en buena medida se deben los desarrollos de la actual teoría de las finanzas.

La influencia que ha ejercido la teoría de la cartera, lejos de haber disminuido, se encuentra en pleno auge. Seguramente los años venideros mostrarán nuevos avances debidos a ella, en el conocimiento de cómo las firmas y los individuos asignan recursos a través del tiempo.

(1) MARKOWITZ, HARRY, *Portfolio selection*, Journal of Finance, marzo 1952, pág. 77:

MARKOWITZ, HARRY, *Portfolio selection: efficient diversification of investments*, John Wiley & Sons Inc., Nueva York, 1959.

(2) TOBIN, JAMES, *Liquidity preference as behavior towards risk*, Review of Economic Studies, febrero 1958, pág. 65.

VON NEUMANN, y MORGENSTERN, OSCAR, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1947.

(4) BERNOULLI, DANIEL, *Exposition of a new theory on the measurement of risk*, Econométrica, enero 1954, pág. 23.

(5) Por supuesto, si una de la varianzas es nula (certeza en el rendimiento) la varianza de los rendimientos de la cartera será nula con 100 % de colocación en aquélla; si ambas varianzas son nulas, la varianza de la cartera es siempre nula.

(6) MARKOWITZ, *op. cit.* en nota (1).

(7) SHARPE, WILLIAM F., *A simplified model for portfolio analysis*, Management Science, enero 1963.

(8) SHARPE, WILLIAM F., *Portfolio analysis*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, junio 1967, pág. 76.

(8) Puede verse un ejemplo de estimación de estos parámetros en:

SMITH, KEITH V., *Stock price and economic indexes for generating efficient portfolios*, Journal of Business, julio 1969.

(9) LINTNER, JOHN, *Security price, risk and maximal gains from diversification*, Journal of Finance, diciembre 1965, pág. 587.

(10) MOSSIN, JAN, *Equilibrium in a capital asset market*, Econométrica, octubre 1966, pág. 768.

(11) FAMA, EUGENE F., *Portfolio analysis in a stable paretian market*, Management Science, enero 1965, pág. 404.

FAMA, EUGENE F., *Risk, return and equilibrium: some clarifying comments*, Journal of Finance marzo 1968, pág. 29.