Ricardo Pascale *

Φ = 1,61803398874989484820........ Fibonacci y su método: ¡En vigencia ochocientos años después!

Para Lionello Puppi

En 1202, hace ochocientos años, se publicaba *Liber abaci*, de **Leonardo Fibonacci** (1175-1250), el más importante matemático de la Edad Media. Leonardo, había nacido en Pisa, hijo de Guglielmo Bonaccio, derivando su nombre más conocido de Fibonacci de Filuis Bonacci, esto es "Hijo de Bonacci".

Sus contribuciones al método, no sólo mantienen su vigencia hasta hoy día, sino que continúan apareciendo nuevas aplicaciones del mismo a nuevos campos. Este ensayo, trata sobre una de sus más importantes contribuciones, la *serie numérica* de **Fibonacci** que desarrollara en el citado libro, tratándose primero los fundamentos de la serie y, luego, algunas aplicaciones, que muestran el universalismo de **Fibonacci** y su aporte, tanto a las ciencias como a las artes.

LA SERIE DE FIBONACCI – FUNDAMENTOS

Descripción

La *serie numérica de* **Fibonacci,** es uno de los más importantes hallazgos metodológicos matemáticos surgido a partir de fenómenos subyacentes en la naturaleza.

La serie, la expone a través del famoso ejemplo de los conejos, conocidos hoy día como los "conejos de Fibonacci" y establece que: *"una pareja de conejos son puestos en el campo y, si los conejos toman un mes para nacer y entonces produce una nueva pareja cada mes, cuantas parejas de conejos habrían al cabo de doces meses de tiempo?".*

---

* Catedrático en la Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.

Si ningún conejo muere en este proceso, la secuencia en términos de número de conejos sería 1, 1, 2 3, 5, 8, 13, 21 ....

Más formalmente, la **serie de Fibonacci** en su forma recursiva es :

$$F(1) = 1$$
$$F(2) = 1$$
$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$
$$\text{Para } n > 2$$

Siguiendo esta fórmula, en la cual cada número, simplificando, es igual a la suma de los dos que le preceden, los treinta primeros números distintos de cero de la serie de **Fibonacci** son: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040.

Los aportes matemáticos de Fibonacci

Fibonacci, escribió cuatro importantes libros de matemáticas. *Liber Abaci* (1202, luego revisado en 1228), *Practica Geometriae* (1220), que es un tratado de geometría, *Flos* (1225) y *Liber Quadratorum* (1225), que fue su obra mas extensa.

En todos ellos, **Fibonacci**, le ha dejado a la Humanidad grandes contribuciones. Es en *Liber Abacci*, en donde establece la serie numérica que hoy lleva su nombre y a la que ya se ha referido este trabajo. Pero es también, en este libro donde introduce en Europa el **sistema numérico decimal**, que hoy usamos de origen hindu-arábico y que Fibonacci había observado con atención desde temprana edad.

Antes de **Fibonacci** , el *sistema numérico*, que se utilizaba en Europa, en esos tiempos, es decir en torno al 1200, era *el romano*.

El sistema numérico decimal que **Fibonacci** introduce en Europa, y utilizado por nosotros hoy día, consta como se sabe de diez signos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y el 0. La incorporación del cero al sistema numérico trae aparejado un importante cambio conceptual que se expresa a través de la ausencia como categoría numérica. Por otra parte, la *posición* de los números también importa y, es por eso que el cero juega aquí un papel muy importante.

Liber quadratorum lo dedica al álgebra, en donde trabaja con ecuaciones, determinadas e indeterminadas de primer, segundo y tercer grado.

La influencia de **Fibonacci** fue decisiva y cambió la situación de las matemáticas que se utilizaban hasta el momento, a lo que contribuyó la *serie*, la introducción del *sistema numérico* que hoy se usa, y la demostración que el sistema numérico está constituido por muchos más números que los que utilizaba la Antigüedad Griega. En una crítica a **Euclides** en su *Elementos* cuando establece categorías de *irracionales* **Fibonacci** señaló que no era completo, al demostrar que las raíces de $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, no se pueden alcanzar con una regla y un compás.

Fibonacci y Φ

Tomando un número de la serie de **Fibonacci** y dividiéndolo entre el precedente, se obtiene un ratio, sobre cuya secuencia se advertirían algunos hallazgos importantes.
Tomando los ratios mencionados se obtiene la siguiente serie de números.
1/1 = 1, 2/1 =2, 3/2 = 1.5, 5/3 = 1.666, 8/5 = 1.6, 13/8= 1.625, 21/13 = 1.61538, 34/21 = 1.61904, 55/34 = 1.61764, 89/55 = 1.61818, 144/89 = 1.61798 y así sucesivamente.

Los ratios resultantes de la operación que se efectúa van acercándose a un valor que es 1,6180339.... .Un ratio da superior a él, el otro da inferior, pero con la característica que van acercandose a él, a medida que se avanza en la secuencia de los números de **Fibonacci**.

Esto es, los cocientes entre dos números cualquiera de la serie de **Fibonacci**

$$\frac{F(n+1)}{F(n)}$$

van tendiendo velozmente a un valor límite, que habitualmente se denota como: **Φ (Phi)** cuyo valor se situa en : **Φ** = 1,61803398874989484820 ...

Este número **Φ**, de particulares propiedades, se conoce como **ratio de Fibonacci número de oro** o **ratio de oro.**

Resulta interesante observar que así como la serie de Fibonacci responde a la fórmula de recurrencia $F(1) = 1$

$F(2) = 1$

$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ para $n>2$

También la serie de "ratios" queda determinada por la fórmula

$$R(1) = 1$$

$$R(n) = 1 + \frac{1}{R(n-1)} \quad \text{para } n>1$$

Algunas características matemáticas de Φ

Cálculo de Phi

Se demuestra que : **$Phi^2 = Phi + 1$**

Es decir que **Phi**, o **número de oro**, es aquel que adicionandole la unidad al mismo, da como resultado su cuadrado. Matemáticamente aparecen *dos* números con esa propiedad, este es Phi y otro número muy relacionado a éste. Matemáticamente la prueba de ello es,

$Phi^2 = Phi + 1$ o , **$Phi^2 - Phi - 1 = 0$**

Esta ecuación tiene dos valores posibles de Phi, que efectuando simples operaciones son:

$½ + \sqrt{5}/2$ y $½ - \sqrt{5}/2$

Estos números son: 1,6180339887 ... y - 0,6180339887 ...

Ambos números tienen una parte decimal idéntica. Se denomina **Phi** al primer número y al opuesto del segundo se lo llama phi, esto es,

Phi = **Φ** = 1,6180339887 ..., y

phi = **Φ** - 1 = 0,61803339887...

Una *segunda* forma de referirse a **Phi**, surge del planteo ya hecho de : $Phi^2 = Phi + 1$, de donde

Phi = 1 + 1/Phi. **Phi** es entonces el número que es igual a **1 mas su recíproco**.

Se podría establecer una *tercera* forma de expresar Phi, en este caso, bajo el concepto de **fracción contínua**. Si Phi = 1 + 1/Phi , puede sustituirse Phi por (1 + 1/Phi) y asi siguiendo se obtiene:

$$\textbf{Phi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ..1.}}}$$

Phi es un número irracional

Cómo se señaló, **Phi** $= \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, y **phi** $= \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Los dos números establecidos se conocen matemáticamente como **irracionales**, esto es que no pueden ser escritos como x / y para todo **x** o **y** enteros. Y que, en su fracción decimal los dígitos no tienen un patrón; esto es que no tienen un círculo de dígitos que terminan por repetirse. De esta forma, **Phi** con sus primeros 50 dígitos decimales, es :

Φ= 1,61803 39887 49894 84820 45868 34365 63811 77203 09179 80576

Y, naturalmente, se podría continuar indefinidamente. Por razones de simplificación, **Phi**, se utiliza como: **Φ = Phi = 1,6180339887,** y mas simplificadamente se suele utilizar como **Φ = Phi = 1,618**

La serie de Fibonacci converge a Φ (Phi)

Los cocientes de la **serie de Fibonacci**, a los que se hizo referencia antes, tienden *asintóticamente* a **Phi** , esto es **F(n) / F(n-1)** converge a **Phi.**

Los resultados de las cocientes van acercándose a **Phi**, esto es cada uno está, más y más cerca de **Phi**, aunque ninguno de ellos coincidirá con Phi, dado que es un número irracional.

LA SERIE DE FIBONACCI – ALGUNAS APLICACIONES

"La divina proporción".

Una aplicación de Φ o *ratio de* **Fibonacci** es la llamada *divina proporción* o *sección de oro.* La misma, que se basa enteramente en los hallazgos de **Fibonacci,** fue sistematizada por el franciscano **Luca Pacioli** (1445-1514). **Pacioli,** tendría en sus trabajos la influencia de **Fibonacci** y **Euclides** y, de sus contemporáneos **Piero della Francesca** (1420-1492) y **Leonardo da Vinci** (1452-1519). Efectuó varias publicaciones, dos de ellas, (en Venecia), son acaso las mas importantes: "*Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalitá*" (1494) y "*De Divina Proportione*" (1509).

En este último libro, cuya ilustración se atribuye a **Leonardo da Vinci,** desarrolla, basándose en la serie de **Fibonacci** ya vista, lo que él denominaría la *Divina Proporción,* esto es: $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$

Si A y B son los extremos de un segmento cuya longitud es a + b, la representación de a y b es la que se muestra en la figura N ° 1 que sigue.

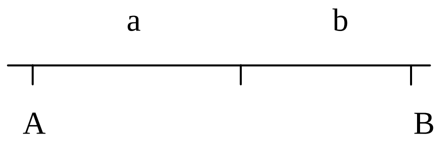

Fig. 1

El **número de oro**, hallado en base a la serie de **Fibonacci**
Φ = 1,618 ... , es el valor de esa relación. Así si (a + b) = 1.618 , se tendría que

$$\frac{1}{0,618} = \frac{1,618}{1} = 1.618.$$

La *divina proporción*, en forma literaria puede establecerse como: *Tomando una linea, si la misma se marca en parte de su trayectoria, esa marca está en términos de la sección de oro, si el segmento **mayor** es a **toda** la línea, como lo es el* segmento **meno**r al segmento **mayor**.

Como discípulo de **Piero della Francesca**, **Pacioli** tomaría muchas de sus enseñanzas. Las dos pasiones de **della Francesca**, fueron el arte y la geometría. Fue uno de los mas grandes teoricos y prácticos de la perspectiva lineal, que se pueden admirar en algunas de sus grandes obras. Hablaría sistematicamente de este tema en su libro “*De Prospectiva Pingendi*” (1474).

A su muerte, ya había escrito lo que sería su tercer gran libro “ *De cinque corporibus regularibus*”, obra central sobre cinco sólidos regulares. No llegó a publicarse en vida, y los manuscritos en cambio, hallados mucho mas tarde, ponen de manifiesto que varias explicaciones de **Pacioli** en *De Divina Porportione*, ya las había expuesto su maestro **della Francesca.**

Los aportes de sistematización de introducción de conceptos bien desarrollados a nivel académico por **Pacioli** son considerables. Sustantivamente, en todo caso, no efectuó en este tema, ningún hallazgo que no fuera basado en la serie que **Fibonacci** había ya desarrollado trescientos años antes.

La sección de oro, luego pasó por algunos siglos sin intenso tratamiento, al menos del que se tenga conocimiento. Hacia 1850, **Zeysing** lo retoma en su libro *Aetetische Forschungen,* y en este caso incursionando en estudios de numerosos casos del cuerpo humano. **Zeysing**, mostraría relaciones de apreciable estabilidad entre las partes del cuerpo humano, en donde aparece en una aplicación en donde la *anatomía* *humana* juega un rol central y, proporciones que serían del mayor interés para el artísta plástico, aportes a los que se unirían los de **T. Cook** y otros.

Por ejemplo, para lo que se ha considerado un hombre de “normal desarrollo”, de 25 años y con una relación de altura de 8 cabezas; su sección áurea aparece en innúmeras relaciones.

Por ejemplo, el ombligo con respecto a la altura total, o el extremo de la mano con los brazos extendidos con respecto a la altura total. Entre el mentón y el ombligo, la sección áurea está en el borde inferior del brazo.

La cabeza en su ancho y alto estará en áurea, como el ojo también.

De esta forma podrían repasarse distintas partes del cuerpo. Por incursionar un ejemplo adicional de los tantos que podrían tomarse (pies, cabeza, oido, etc), se observa que entre la falange y la falangeta están en áurea proporción como lo están también falangeta y la falangina.

La aplicación de la sección áurea a las *artes* por su parte es amplísima. Por exigencias de limitación, sólo se mencionan algunas para ilustrar.

Dicha proporción, tan repetida en la anatomía humana, fue tomada por **Bach** y **Beethoven** para realizar muchas de sus obras. En las artes plásticas es también extensamente utilizada. El gran maestro uruguayo **Joaquín Torres García** (1874-1949), quién durante su estadía de muchos años en Europa fue compañero de **Mondrian** y **Picasso**, cuando retorna a Montevideo trae consigo uno de sus grandes aportes al arte, su *Universalismo Constructivo,* en el cual se utiliza con mucha frecuencia la sección áurea.

La arquitectura

En la arquitectura, las aplicaciones son también numerosas. Se ha elegido para este ensayo, las que efectuó **Charles – Edouard Jeanneret,** conocido como **Le Corbusier** (1987-1965) suizo de nacimiento, nacionalizado francés, que fue uno de los mas importantes e influyentes arquitectos del siglo XX.

En abril de 1947, **Le Corbusier** presentó por primera vez frente al público su **Modulor,** sistema de medidas basadas en el cuerpo humano que él venía desarrollando desde 1943 y que se asienta en la serie de **Fibonacci.**

El **Modulor** es una secuencia de medidas, en realidad son dos secuencias de medidas, conocidas como la roja y la azul, generadas a partir de lo que él supuso como un tamaño promedio del hombre, que subdivide y expande basándose en los antecedentes ya estudiados por **Fibonacci**. Con la secuencia del **Modulor**, **Le Corbusier** busca que las composiciones arquitectónicas cierren armónicamente con la talla humana.

Sus ideas son publicadas en su libro **Modulor** en 1950, y luego ampliadas y con referencias a casos concretos en su **Modulor 2**, publicado en 1955.

Las ideas básicas de **Le Corbusier,** sobre el Modulor partiendo de un hombre de altura ideal de 1,829 mts., con los brazos levantados llegaria a 2,26 mts. Esta altura dividida en dos partes de 1,13 mts. cada una se ubican a la altura del ombligo, y 86 cms. debajo de la mano extendida.

A partir de estas líneas básicas, va desarrollando su sistema de proporciones ligadas a la anatomía del hombre, permitiendo elaboraciones arquitectónicas más adaptadas a la vida del hombre que el resultante del sistema métrico. Se trata, en definitiva de un sistema de medidas basado en el hombre y en la geometría. Las estructuras arquitectónicas serán de esta forma más adecuadas al hombre.

La economía

La serie de **Fibonacci,** se ha ido extendiendo al campo científico de la economía, buscándose a través de ella incrementar la capacidad de análisis y predicción, en particular de la evolución de los mercados. En este sentido, los primeros análisis sistematizados se deben a **Ralph N. Elliot** quien puso de relieve, los ciclos evolutivos de los mercados financieros siguiendo los patrones de comportamiento que había sentado **Fibonacci.** En palabras de **Elliot:** "Expuesto simplemente el mundo financiero es una creación del hombre y por tanto refleja la idiosincrasia humana" y continúa señalando que "todas las actividades humanas tienen en este sentido tres elementos distintivos: patrón de comportamiento, tiempo y ratio; todos ellos siguen la serie de Fibonacci."

El sentido, en cierta forma estático de estas primeras investigaciones, tuvieron aplicaciones significativas comenzando en la década de los 80, ahora en base a la espiral que puede desarrollarse a partir de la serie de **Fibonacci.** La espiral que se construye a partir de la serie se observa en la Figura 2.

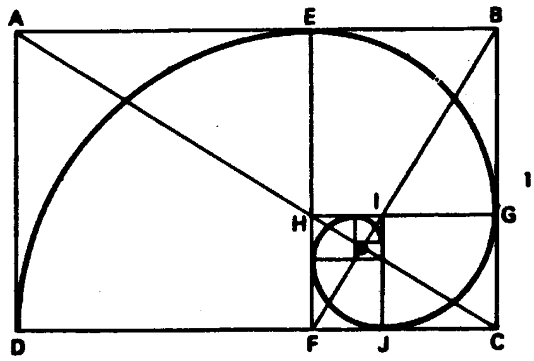

Fig. 2

Matemáticamente es una espiral logarítmica, que sería la función que sigue su patrón de crecimiento, que como se ve en Figura 3, representa la trayectoria de la *spira mirabilis,* conocida como la conchilla *nautilus* (nautilus pompilius).

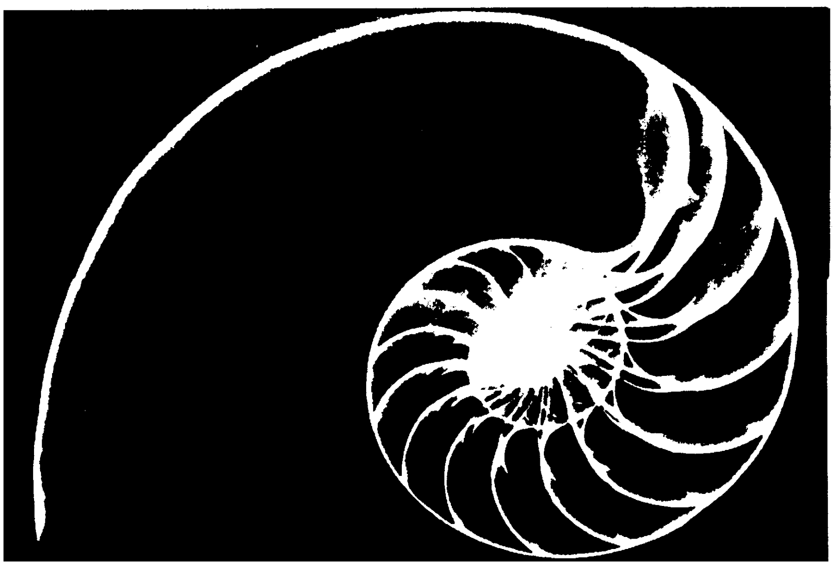

Fig. 3

Esta espiral logarítmica, frecuentemente señalada como la más bella de las curvas matemáticas, es un caso especial de la espiral logarítmica general. La fórmula general de la espiral logarítmica es $r = a\, e^{b\theta}$, donde a y b son constantes.

Si se elige $b = \frac{2}{\pi} \ln(\Phi)$ resulta que Φ es el resultado de dividir dos valores de r que corresponden a dos valores de θ que difieren en $\frac{\pi}{2}$.

Investigaciones de las últimas dos décadas buscan arrojar luz, en términos de tiempo y precios de la evolución de los mercados.

Fischer utilizando la espiral logarítmica con Φ, ha hecho numerosas demostraciones de la evolución de los mercados financieros. La Figura 4 [1]muestra la evolución semanal del yen en el período 07-89 a 07-92. La espiral tiene un punto central y un punto de inicio de su trayectoria, la evolución de la rotación siguiendo Φ, va poniendo de relieve los ciclos del mercado.

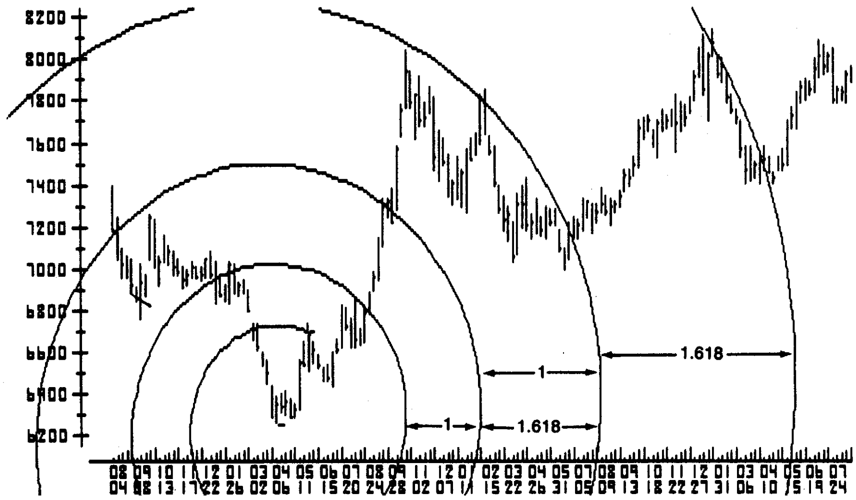

Fig. 4

Estas investigaciones, se consideran un comienzo promisorio en el camino de la aplicación a las ciencias económicas de las leyes naturales, que **Fibonacci** interpretara matemáticamente.

[1] La fuente en las Figs. 2, 3 y 4 son Huntley y Fisher, Op.cit.

EPILOGO

Muchas veces, las ciencias y, en particular las matemáticas, parecen permanecer alejadas de la vida cultural de tránsito frecuente. Algunos de sus hallazgos, con el tiempo van dando más y más diversos frutos. A uno de estos casos, la *serie numérica* de **Fibonacci,** se han ocupado estas páginas. La potencia de su hallazgo, llevó a **Kepler** a señalarlo, en su "*De Nive Sexangula"* como "uno de los dos tesoros de la geometría". Fueron los hallazgos de **Fibonacci** que incrementaron en **Einstein ,** su interés por las relaciones entre las matemáticas y la naturaleza y remarca que "podría ser posible, mediante simples deducciones encontrar la imagen -o sea la teoría- de cada proceso natural, así como de aquellos organismos vivientes".

A ochocientos años de su hallazgo, este ensayo busca *revisitarlo,* para mostrar como, un excepcional descubrimiento metodológico puede aplicarse a campos tan diversos como las artes, a la anatomía, la economía para esclarecerlos y enriquecerlos. Es una clara expresión, acerca de que la distinción entre ciencias naturales o ciencias "duras" y humanidades debe ir dejando el camino hacia una *unidad de conocimiento,* que el caso de **Fibonacci**, como pocos, permite ilustrarlo con elocuencia. *Unidad de conocimiento,* que debe ser el signo del pensamiento de nuestros tiempos.

Acompañar con un ensayo en un homenaje científico tiene siempre un significado, más allá del tema tratado en sí mismo. Es claro que, en este caso, para acompañar a **Lionello Puppi,** el gran maestro de Ca'Foscari y de tantas otras universidades, la elección debía recaer en una figura parangonable y, así la opción fue **Fibonacci**.

No es tampoco ajeno a esa elección, el presagio de que al igual que aquel gran pisano, el legado científico de **Puppi,** sea revisitado para ser admirado y utilizado como fuente de sabiduría, ochocientos años después.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

An Example of Fibonacci Numbers used to Generate Rhythmic values in Modern Music. **Fibonacci Quarterly**, Volume 9, part 4, 1971.

Boles, M. *The Golden Relationship: Art, Maths, Nature*, 2nd Ed., Pythagorean Press, 1987.

Cook, Theodore Andrea, **Sir,** *The Curves of Life: Being an Account of Spiral Formations and Their Application to Growth in Nature, to Science, and to Art: With Special Reference,* Dover 1979..

Dobson, Edward, *Understanding Fibonacci Numbers,* Traders Press, 1984.

Doczy, Gyorgy, *The Power of Limits: Proportional Harmonies in Nature, Art, and Architecture,* Shambala Press, 1994.

Fischer, Robert, *Fibonacci Applications and Strategies for ,* J. Wiley & Sons, 1993.

Garland, Trudi H. Garland, Judi, **Kathleen Engelberg,** *Fascinating Fibonaccis: Mystery and Magic in Numbers,* Dale Seymours. 1987.

Ghyka, Matila Ghyka, *The Geometry of Art and Life,* 2nd Ed. 1978.

Haylock, Dereck, *Mathematics Teaching,* Volume 84, 1978.

Herz-Fischles, **Roger Herz-Fischler,** *A Mathematical History of the Golden Number.* Dover 1998.

Hill, J. R. *The Complete Writings of R. N. Elliot with practical applications from J.R. Hill.* Commodity Research Institute. N. Carolina, 1979.

Huntley, H. E. *The Divine Proportion: A study in mathematical beauty*. Dover, 1970.

Kalenberg, Angel, *Arte Uruguayo y otros"* Ed. Galería Latina, Montevideo, 1990

Kepes, K., *The New Landscape in Art and Science,* The New Oxford Companion to Music The Violin, Volume 2.

King, Charles. *Leonardo Fibonacci,* **Fibonacci Quarterly 1,** 1963.

Linn, C.F., *The Golden Mean: Mathematics and the Fine Arts,* Doubleday, 1974.

May, Mike, *Did Mozart Use the Golden Section?* American Scientist, March April 1996, Science Observer.

Mc. Clendon, R.B. *Leonardo of Pisa and His Liber Quadratorum*. American Mathematical Monthly 26, 1919.

Newbould, Brian *Schubert Studies*, London Ashgate Press, 1998.

Norden, Hugo, *Proportions in Music* Fibonacci Quarterly, Vol 2, 1964

Power, Tushaar, *The Proportional Design of J. S Bachs's Two Italian Cantatas*, Musical Praxis, Vol. 1, No. 2, Autumn 1994.

Prechter, Robert R. Jr. A. J. Frost, *Elliot Wave Principle: Key to Market Behavior,* New Classics Library, 1998.

Prechter, Robert R., *The Wave Principle of Human Social Behavior and the New Science of Socionomics,* 1999.

Read, H., *Education Through Art,* 3rd Edition, Pantheon Books, 1956.

Sudduth, Billie Ruth, *Mathematics Teaching in the Middle School*, January 1999.